9° Μάθημα: 3/12/2020

Ειδικές Συναρτήσεις:

Η συνάρτηση Γάμμα: Ο πρώτος ορισμός δόθηκε από τον Euler ως $\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{z(z+1) \cdot (z+2) \cdots (z+n)} n^z$

με $z \neq 0, -1, -2, \ldots, -n$

Βάση του ορισμού:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(z+1)(z+2) \cdot \ldots \cdot (z+1+n)} \cdot n^{z+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{z(z+1)(z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} n^z \cdot \frac{z}{z+1+n} \cdot n = \Gamma(z) \cdot z = z \cdot \Gamma(z)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ και πάλι βάση του ορισμού:

$$\Gamma(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)} n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

το μεγαλύτερο από του αριθμητή

το μεγαλύτερο από του παρανομαστή

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$

$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2$

$\ldots$

$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$

Συνεπώς αν $\boxed{z \text{ θετικός ακέραιος}}$

$\Gamma(z+1) = z!$ ή $\Gamma(n+1) = n!$ $n \in \mathbb{N}$

Ορίζω ως συνάρτηση Γ ($2^{ος}$ ορισμός) το ολοκλήρωμα $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{z-1}\,dt$ με $Re\{z\}>0$

$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ ορισμός! Πρόχειρο

e^x αντίστροφη του $\ln x$.

Μέσω μιας αντικατάστασης $t=x^2$ ($dt=2x\,dx$)

$$\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{z-1}\,dt = \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2z-2}\cdot 2x\,dx =$$

$$=2\int_0^\infty x^{2z-1}\cdot e^{-x^2}\,dx$$

2 αντικαταστάσεις

Επίσης μπορώ να θέσω $t=-\ln x$

$$\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{z-1}\,dt = \int_1^0 e^{\ln x}(-\ln x)^{z-1}\left(-\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx$$

Η ισοδυναμία των ορισμών:

Γνωρίζαμε ότι $e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ αντικαθιστούμε

και ορίζουμε $F(z,n)=\int_0^1\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt$

με $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}F(z,n)$ θέτουμε $y=\frac{t}{n}\Rightarrow t=n\cdot y$, $dt=n\cdot dy$

$F(z,n)=n^z\int_0^1(1-y)^n\,y^{z-1}\,dy$ και χρησιμοποιώ παραγοντική ολοκλήρωση

$$\frac{F(z,n)}{n^z}=(1-y)^n\cdot\frac{y^z}{z}\Big|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1(1-y)^{n-1}\cdot y^z\,dy$$

Συνεχίζω την ίδια διαδικασία ώστε να εξαλείψω τον όρο $(1-y)^n$.

$$F(z,n) = n^z \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \cdot \int_0^1 y^{z+n-1}\,dy =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\, n^z$$

συνεπώς κατά προφανή τρόπο $\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \Gamma(z)$

Ιδιότητες:

1. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Αποδ:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{-1/2}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \; = \quad \text{συνεχίζεται}$$

$x=\sqrt{t}$ και $x^2 = t \Rightarrow dt = 2x\,dx$

συνεχίζεται εδώ

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\cdot 2x\,dx = 2\cdot\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Πρόχειρο:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \Rightarrow I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \cdot \int_0^\infty e^{-x^2}dx =$$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$ dummy variable

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ άρα $\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta =$

$$= \pi/2 \int_0^\infty r\cdot e^{-r^2}dr$$

2. Αναλυτική Συνέχιση

Για $z=-n$ χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο ως $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$. Δηλ.

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{-1/2} = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-5/2) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

3. Τύπος του Stirling

Για $z=n\in\mathbb{N}$ γνωρίζω ότι $\Gamma(n+1)=n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx =$

$$= \int_0^\infty e^{n\ln x - x}dx$$

Θέτουμε $x=n+y$ ώστε

$$\Gamma(n+1) = \int_{-n}^\infty e^{n\ln(n+y)-n-y}dy = e^{-n}\int_{-n} e^{n\ln(n+y)-y}dy$$

$$= e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln[n(1+\frac{y}{n})]-y}dy =$$

$$= n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(1+\frac{y}{n})-y}dy$$

Γνωρίζω από το Θεώρημα Taylor ότι για μικρά x $0<x<1$ $\ln(1+x) \simeq x - \dfrac{x^2}{2}$ δηλαδή

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n \hookrightarrow \text{2 πρώτοι όροι}$$

$\ln\left(1+\dfrac{y}{n}\right) = \dfrac{y}{n} - \dfrac{y^2}{2n^2}$ αντικαθιστώ

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{y-\frac{y^2}{2n}-y}dy = n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{-y^2/2n}dy$$

Για μεγάλες τιμές του n $(-n \to -\infty)$. Δηλαδή

$$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$$

Γενικά

$$\Gamma(x+1) \cong \sqrt{2\pi x}\cdot x^{x}\cdot e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}\dots\right)$$

4. Τύπος διπλασιασμού: $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+1/2)$

Γενικά $\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)=$

$$= m^{1/2-mx}\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,\Gamma(mx)$$

5. Η σταθερά Euler: $\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$

6. $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$